



64. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben



© 2024 Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden.* Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

Drei der vier Aufgaben müssen bearbeitet werden. Der letzte Abgabetermin ist Montag nach den Herbstferien (28.10.) im Fach von Frau Bowitz.

641011

- a) Man bestimme die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y, z) der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.
b) Man bestimme die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y, z) der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Hinweis: Eine Lösung ist ein geordnetes Tripel (x, y, z) , welches die jeweilige Gleichung erfüllt.

Hinweis: Die Gleichung $x^2 + y^2 + 4 \cdot z^2 = 4$ hat genau sechs ganzzahlige Lösungen, die alle (paarweise) verschieden sind: $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$.

641012

In einem gegebenen Kreis betrachten wir konvexe Vierecke. Die Ecken der Vierecke dürfen im Innern des Kreises liegen oder auf diesem Kreis.

Zeigen Sie, dass jedes solcher Vierecke mit größtem Flächeninhalt dann ein Quadrat ist.

Hinweis: In jedem konvexen Viereck sind alle Innenwinkel kleiner als 180° .

641014

Wir berechnen für jede positive ganze Zahl n die Zahl y anhand der Formel

$$y = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)}{4}.$$

- a) Zeigen Sie, dass y für $n = 9$ und auch für $n = 2025$ jeweils das Produkt von zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist.
b) Zeigen Sie, dass y für jede positive ganze Zahl n das Produkt von zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist.

641015

Ein Schaf und eine Ziege können eine Wiese gemeinsam in 50 Minuten abfressen.

Eine Ziege allein hätte 80 Minuten gebraucht, um die Wiese abzufressen.

Ermitteln Sie die Zeit, in der 5 Schafe und 2 Ziegen die Wiese abfressen können, wenn gilt: Alle Schafe fressen gleich schnell und alle Ziegen fressen auch gleich schnell. Die Fressgeschwindigkeit eines Tieres ändert sich nicht, wenn weitere Tiere anwesend sind.